

MINES PARISTECH

RAPPORT DE S3 RECHERCHE

CONTRÔLE DE L'INTRICATION DE DEUX
QUBITS



Valentin THOMAS
Promo 2013

Tuteur : M. Pierre ROUCHON
Laboratoire d'accueil : CAS

10 septembre 2014 — 23 février 2015

Résumé

Ce S3 Recherche a porté sur un domaine à l'interface entre l'automatique et la physique quantique : le contrôle quantique. Cette théorie moderne possède de nombreuses applications en théorie de l'information quantique (ordinateur quantique, cryptographie quantique. . .). Mon travail s'est concentré sur l'étude d'un système quantique composé de deux Qubits (des atomes à deux niveaux d'énergie, des bits quantiques) dans le but de maximiser leur intrication. Cependant, cela soulève quelques problèmes propres à la physique quantique : comment caractériser et contrôler l'intrication ? Comment observer et contrôler un système qui est lui-même perturbé par notre observation ? Pour surmonter ces difficultés, nous avons construit une trajectoire de référence adéquate, puis nous nous assurons que le système réel suit cette trajectoire grâce à un contrôle en boucle fermée. Notons que dans ce rapport, la problématique sera abordée avec le formalisme d'un mathématicien plutôt que celui d'un physicien. Les résultats seront présentés grâce à des simulations MATLAB. Ce travail a mené à la rédaction d'un article scientifique qui sera publié dans l'année. Je tiens à remercier Pierre Rouchon, Pierre Six, Alain Sarlette et toute l'équipe du CAS leur accueil chaleureux.

Table des matières

1	Introduction générale	4
1.1	Cadre du S3 Recherche	4
1.2	Automatique	4
1.3	L'expérience mère : la boîte à photons	5
1.4	Contrôle quantique	7
2	Modélisation du système quantique	8
2.1	Rappels de mathématiques et d'automatique	8
2.1.1	Exponentielle de matrice	8
2.1.2	Produit tensoriel	9
2.1.3	Erreurs	9
2.2	Rappels de mécanique quantique	10
2.2.1	Fonction d'onde	10
2.2.2	Qubit seul	11
2.2.3	Paire de Qubits	11
2.2.4	Matrices de Pauli	12
2.2.5	Intrication quantique et concurrence	13
2.3	Dynamique du système	14
2.3.1	Hamiltonien d'interaction	14
2.3.2	Hamiltonien de contrôle	14
3	Contrôle du système idéal	16
3.1	Hypothèses	16
3.2	Contrôle en boucle ouverte	16
3.2.1	Transformation de l'équation différentielle	16

TABLE DES MATIÈRES

3.2.2	Approximation du champ tournant	17
3.2.3	Maximisation de l'intrication à T_0	19
3.2.4	Conserver l'intrication	20
3.3	Bilan sur la trajectoire de référence	21
3.4	Contrôle en boucle fermée	21
3.4.1	Construction de la fonction de Lyapunov	21
3.4.2	Loi de contrôle	22
3.5	Simulations	24
4	Contrôle du système réel	27
4.1	Les systèmes quantiques ouverts	27
4.1.1	Matrice densité	27
4.1.2	Concurrence	27
4.1.3	Mesure et décohérence	28
4.1.4	Fidélité et nouvelle fonction de Lyapunov	29
4.2	Équation d'évolution du système	30
4.2.1	Équation de Liouville	30
4.2.2	Équation stochastique maîtresse en temps continu	30
4.2.3	Équation stochastique maîtresse en temps discret	31
4.3	Filtre quantique	31
4.4	Adaptation des lois de contrôle	32
4.4.1	Contrôle en boucle ouverte	32
4.4.2	Contrôle en boucle fermée	32
4.5	Simulations	33
4.5.1	Première simulation	33
4.5.2	Deuxième simulation	35
5	Conclusion	40
5.1	Critique des résultats	40
5.2	Part personnelle	40

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Cadre du S3 Recherche

J'ai effectué S3 Recherche sous la direction de Pierre ROUCHON au Centre Automatique et Systèmes (CAS) de Mines ParisTech.

Une particularité de mon S3 recherche fut l'autonomie avec laquelle j'ai travaillée. Pendant les deux premières semaines du S3 Recherche, Pierre SIX, ancien élève de l'école et doctorant, m'a donné quelques bases de contrôle quantique et m'a fait travailler sur des simulations de la boîte à photons.

Cependant, dès que j'ai commencé à travailler sur mon sujet de recherche, j'ai travaillé seul, prenant rendez-vous avec M. ROUCHON de temps à autre pour discuter de mes avancées ou de mes impasses. Je remercie ici M. ROUCHON pour sa disponibilité et la clarté de ses explications.

Ce S3 recherche se situe plus du côté de la recherche fondamentale que de la recherche appliquée. Ce qui est établi dans ce rapport pourrait être l'objet d'une expérience physique, mais nous ne traiterons ici que des aspects théoriques de l'expérience en la simulant.

1.2 Automatique

L'automatique ou théorie mathématique du contrôle des systèmes est une branche des mathématiques appliquées relativement moderne puisque les premières expériences d'automatique remontent au milieu du 19^e siècle et les premiers grands développements de cette théorie (Lyapunov, Hurwitz, Nyquist...) ont eu lieu au début du 20^e siècle.

Cette science étudie le comportement de systèmes dynamiques et la façon dont on peut les contrôler. L'automatique repose sur trois grands thèmes :

- Systèmes dynamiques : Modélisation du système avec le formalisme des variables d'état, étude de stabilité et de robustesse.

- Observabilité : Estimation des variables d'état du système à partir de capteurs partiels et/ou imparfaits.
- Commandabilité : Planification de trajectoire, stabilisation du système autour d'une trajectoire de référence à l'aide d'actionneurs.

Ces trois notions seront largement abordées dans ce rapport. Tout d'abord, nous allons chercher à modéliser le système quantique, puis nous chercherons à le commander et à l'observer.

1.3 L'expérience mère : la boîte à photons

En 2012, Serge Haroche obtient le prix Nobel de physique pour avoir réussi à observer des photons sans les détruire grâce à l'expérience de la boîte à photons. Cette expérience est également la première expérience de contrôle quantique par rétroaction en temps réel. Pierre Rouchon et Mazyar Mirrahimi ont joué un grand rôle dans le contrôle et l'observation des photons lors de cette expérience [1].

Au début de mon S3 Recherche, j'ai donc travaillé sur la modélisation de cette expérience fondamentale pour comprendre les bases du contrôle quantique.

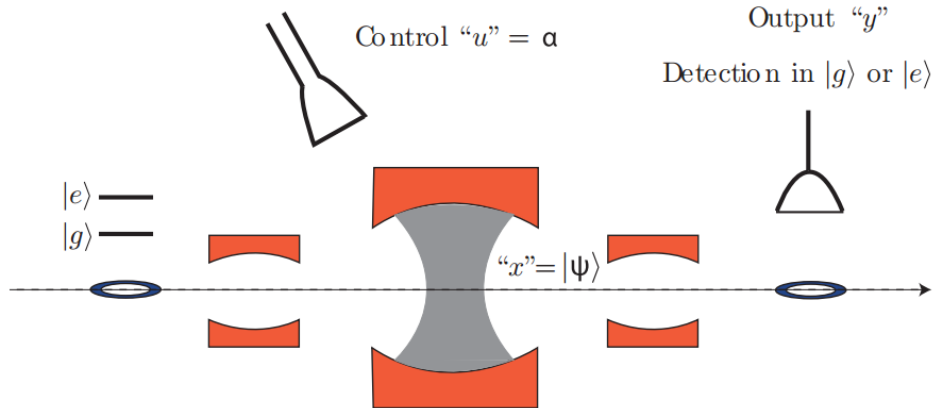


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié du fonctionnement de la boîte à photons. Un atome à 2 niveaux d'énergie (à gauche) est préparé puis envoyé au travers d'une cavité dans laquelle vivent des photons. Lorsque l'atome sort, on mesure son état. La modification de l'état de l'atome lors du passage dans la cavité nous informe sur le nombre de photons dans cette cavité. On peut alors rajouter un contrôle u pour contrôler ce nombre de photons en moyenne.



FIGURE 1.2 – L'équipe de contrôle quantique du CAS et le physicien Igor DOTSENKO devant la boîte à photons.

1.4 Contrôle quantique

Le contrôle quantique est un secteur récent de l'automatique. La principale motivation de ce domaine est la construction de l'ordinateur quantique et l'amélioration des technologies de la théorie de l'information quantique (cryptographie quantique, téléportation quantique...).

L'un des problèmes auxquels il se heurte aujourd'hui est que nous sommes actuellement incapables de coupler des systèmes quantiques de façon efficace, ce qui serait nécessaire par exemple à la construction de l'ordinateur quantique.

Chapitre 2

Modélisation du système quantique

2.1 Rappels de mathématiques et d'automatique

2.1.1 Exponentielle de matrice

Nous allons présenter dans cette section quelques résultats importants concernant l'exponentielle d'une matrice.

Dans la suite de cette section, $n \in \mathbb{N}^*$, et I représentera la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 2.1.1. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,*

$$[A, B] = 0 \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Proposition 2.1.2. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,*

$$AB = BA \Rightarrow A e^B = e^B A \tag{2.1}$$

$$AB = -BA \Rightarrow A e^B = e^{-B} A \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.3. *Soit $z \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,*

$$\text{Si } A^2 = I \text{ alors } e^{zA} = \cosh(z) \cdot I + \sinh(z) \cdot A$$

Démonstration. On utilise la définition de l'exponentielle matricielle.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, e^{zA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zA)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) A \\ &= \cosh(z) \cdot I + \sinh(z) \cdot A \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.4. *Si $A^2 = I$, $x \in \mathbb{R}$ alors*

$$e^{ixA} = \cos(x) \cdot I + \sin(x) \cdot A \quad (2.3)$$

2.1.2 Produit tensoriel

Définition 2.1.5. *Pour, $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$,*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,m}B \\ \vdots & a_{i,j}B & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,m}B \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.6. *Pour $(e_i)_{i \in I}$, base de E , espace vectoriel, et $(f_j)_{j \in J}$ base de F , un autre espace vectoriel :*

$$(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J} \text{ est une base de } E \otimes F$$

2.1.3 Erreurs

Il sera intéressant pour nous de quantifier les erreurs que nous faisons afin de pouvoir critiquer nos résultats. Pour cela nous allons introduire deux types d'erreur que l'on rencontre souvent en automatique.

Pour quantifier ces erreurs, il nous faudra une distance d , et en contrôle quantique nous choisirons d telle que :

- $0 \leq d(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \leq 1$, d peut être lue comme un pourcentage de différence.
- $d(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle \simeq |\phi\rangle$ au sens d'une relation d'équivalence 2.2.1 que nous définirons page 11.
- $d(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = 1 \Leftrightarrow \langle \psi | \phi \rangle = 0$, la distance est maximale si les états sont orthogonaux.

Tracking error

Cette erreur est celle entre la trajectoire de référence que l'on veut suivre et la trajectoire réelle que l'on suit.

$$\text{tracking error} = d(\text{état}_{ref}, \text{état})$$

Knowledge error

Cette erreur est celle entre la trajectoire réelle que l'on suit et la trajectoire estimée, celle que l'on pense suivre.

$$\text{knowledge error} = d(\widehat{\text{état}}, \text{état})$$

où $\widehat{\text{état}}$ désigne l'état estimé.

2.2 Rappels de mécanique quantique

2.2.1 Fonction d'onde

On considère en physique quantique qu'un système ne peut plus simplement être décrit par des données comme sa position ou sa vitesse, il faut le décrire de façon probabiliste, et pour ce faire, on introduit la notion de fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$. ψ est une fonction d'un espace de Hilbert \mathcal{H} muni d'un produit scalaire sesquilinéaire noté $\langle . | . \rangle$ à valeurs complexes. En particulier, cette fonction d'onde est reliée à la probabilité dP de présence de la particule dans un volume dV autour de la position \mathbf{r} par la relation $dP = |\psi(\mathbf{r})|^2 dV$. On comprend ici que le sens physique est porté par l'amplitude de probabilité $|\psi|^2$ et non par la fonction d'onde directement.

Plus précisément, dans ce rapport nous travaillerons exclusivement en notation de Dirac.

Notation ket : À ψ on associe $|\psi\rangle$, le vecteur vérifiant $\psi = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$
 $|\psi\rangle$ ne dépend explicitement que du temps.

Notation bra : $\langle \psi |$ est une forme linéaire telle que $\forall \phi \in \mathcal{H}, \langle \psi | (|\phi\rangle) = \langle \psi | \phi \rangle$

Propriétés élémentaires

- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, (\alpha|\psi\rangle)^\dagger = \alpha^* \langle \psi |$. \dagger désigne le transconjugué.
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, (\alpha|\psi\rangle)^* = \alpha^* |\psi^*\rangle$. $*$ désigne le conjugué.
- $\langle \psi | \psi \rangle = 1$. On dit que $|\psi\rangle$ est normé. Cela traduit le fait que l'intégrale sur tout l'espace des amplitudes de probabilité vaut 1.

Équation de Schrödinger : L'évolution de $|\psi\rangle$ au cours du temps est donnée par

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}|\psi\rangle$$

où \mathbf{H} est le Hamiltonien du système, un opérateur hermitien pouvant éventuellement dépendre du temps t .

Dans tout ce papier, nous poserons $\hbar = 1$ pour alléger les calculs, c'est simplement un changement d'unité. Nous écrirons alors l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -i\mathbf{H}|\psi\rangle \tag{2.4}$$

Relation d'équivalence : Comme dit ci-dessus, le sens physique est porté par l'amplitude de probabilité et non par la fonction d'onde directement. Nous allons donc ici définir une relation d'équivalence :

$$|\psi\rangle \simeq |\phi\rangle \Leftrightarrow \psi \text{ et } \phi \text{ ont le même sens physique.}$$

En pratique, cela signifie que les amplitudes de probabilités sont égales, donc pour deux ket normés :

$$|\psi\rangle \simeq |\phi\rangle \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi[, |\psi\rangle = e^{i\theta}|\phi\rangle$$

2.2.2 Qubit seul

Un Qubit est un atome possédant deux niveaux d'énergie. Nous noterons g l'état fondamental ("ground state") et e l'état excité ("excited state"). Pour un atome à deux niveaux, $(|g\rangle, |e\rangle)$ désignera la base orthonormée de \mathcal{H} , formée de l'état fondamental $|g\rangle$ et de l'état excité $|e\rangle$. La fonction d'onde d'un tel atome est alors de la forme :

$$|\psi\rangle \in \{c_g|g\rangle + c_e|e\rangle, (c_g, c_e) \in \mathbb{C}^2, |c_g|^2 + |c_e|^2 = 1\}$$

La probabilité de mesurer le système dans l'état g (resp. e) est $|c_g|^2$ (resp. $|c_e|^2$). Après la mesure, la nouvelle fonction d'onde est la projection de l'ancienne fonction d'onde sur l'état mesuré.

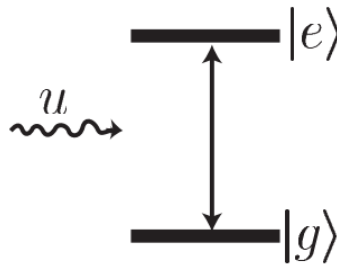


FIGURE 2.1 – Représentation schématisée d'un atome à deux niveaux. u est un contrôle qui, à une certaine fréquence, peut provoquer la montée ou descente en énergie de l'atome.

2.2.3 Paire de Qubits

Nous considérerons tout au long de ce rapport le système composé de deux Qubits. Si nous appelons \mathcal{H}_1 l'espace de Hilbert associé au premier Qubit et \mathcal{H}_2 celui associé au deuxième, alors l'espace de Hilbert associé à la paire est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Par symétrie $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, et ces espaces ont pour base $(|g\rangle, |e\rangle)$. \mathcal{H} a donc pour base $(|g\rangle \otimes |g\rangle, |g\rangle \otimes |e\rangle, |e\rangle \otimes |g\rangle, |e\rangle \otimes |e\rangle)$. On notera les éléments de cette base de façon plus concise : $(|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle)$.

La fonction d'onde est une superposition quantique des états possibles.

Exemple 2.2.1. Si nous appelons $|\psi_1\rangle$ la fonction d'onde décrivant le premier atome et $|\psi_2\rangle$ celle décrivant le second, la fonction qui représente l'état total du système des deux atomes est

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

2.2.4 Matrices de Pauli

Définition

Considérons les opérateurs suivants sur \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|, \\ \mathbf{S} &= |g\rangle\langle e|, \quad \mathbf{S}_+ = \mathbf{S}^\dagger = |e\rangle\langle g|, \quad \mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{S}_+ = |g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|, \\ \mathbf{Y} &= i\mathbf{S} - i\mathbf{S}_+ = i|g\rangle\langle e| - i|e\rangle\langle g|, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{S}_+\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{S}_+ = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

\mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} sont les opérateurs agissant sur le spin d'un atome à deux niveaux, ce sont les spinneurs 2D. Dans la base $(|g\rangle, |e\rangle)$ ils peuvent être représentés sous la forme de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{S}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sous cette forme, \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} sont appelés les matrices de Pauli.

Cependant, dans l'espace produit de la paire de Qubits, il nous faut définir des opérateurs sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. On définit pour un opérateur \mathbf{O} de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, les opérateurs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$\mathbf{O}_1 = \mathbf{O} \otimes \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{O}_2 = \mathbf{I} \otimes \mathbf{O}$$

Propriétés

Commutation : Les matrices de Pauli satisfont les relations suivantes :

$$\mathbf{XY} = -\mathbf{YX} = i\mathbf{Z}, \quad \mathbf{YZ} = -\mathbf{ZY} = i\mathbf{X}, \quad \mathbf{ZX} = -\mathbf{XZ} = i\mathbf{Y} \tag{2.6}$$

On peut en déduire $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 2i\mathbf{Z}$, $[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = 2i\mathbf{X}$, $[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = 2i\mathbf{Y}$.

Exponentiation : Étant donné que les matrices de Pauli sont des racines de l'identité, elles vérifient la propriété 2.3 et ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta X} = \cos \theta + i \sin \theta X, \quad e^{i\theta Y} = \cos \theta + i \sin \theta Y, \quad e^{i\theta Z} = \cos \theta + i \sin \theta Z. \quad (2.7)$$

2.2.5 Intrication quantique et concurrence

Intrication

Dans l'exemple 2.2.1 nous avons décrit la fonction d'onde du système de deux Qubits comme le produit tensoriel des fonctions d'ondes des deux atomes. Pourtant, cela n'est pas toujours possible. Si c'est possible, on dira que le système est dans un état **séparable**, dans le cas contraire, on dira que le système est dans un état **intriqué**.

Exemple 2.2.2. Par exemple, on pourra remarque que $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|ee\rangle$ est un état intriqué.

Exemple 2.2.3. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|ge\rangle$ est par contre un état séparable. Il suffit de se rendre compte que

$$|\psi\rangle = |g\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|g\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|e\rangle\right)$$

Concurrence

Dire si un système est dans un état intriqué ou séparable n'est pas d'une grande difficulté pour une paire de Qubits. Néanmoins, quantifier l'intrication du système est beaucoup plus dur. Pour cela nous faisons intervenir la notion de concurrence $\mathcal{C} \in [0, 1]^{\mathcal{H}}$. Si $\mathcal{C}(\psi) = 0$, le système n'est pas intriqué alors que si $\mathcal{C}(\psi) = 1$, le système est maximalelement intriqué. Pour un système de deux Qubits, [4] nous donne une formulation explicite de la concurrence :

$$\mathcal{C}(\psi) = |\langle \psi | \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 | \psi^* \rangle| \quad \text{où } \psi^* \text{ est le conjugué complexe de } \psi.$$

Exemple 2.2.4. Calculons $\mathcal{C}(\psi)$ pour $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|ee\rangle$. Il est possible de le faire de plusieurs façons, mais la plus simple est d'écrire le système sous forme matricielle dans la base $(|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle)$. Alors

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{C}(\psi) = \frac{1}{2} | -2 | = 1$.

Exemple 2.2.5. Dans le cas de $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|gg\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|ge\rangle$, on pourra vérifier que la concurrence est nulle.

Sous forme matricielle $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 0 \ -i \ 1)$ et $|\psi^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$ Ainsi

$$\mathcal{C}(\psi) = \frac{1}{2}(1 \cdot 0 - i \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot -i) = 0.$$

2.3 Dynamique du système

2.3.1 Hamiltonien d'interaction

Nous considérons que notre système est soumis à un Hamiltonien d'interaction locale de la forme

$$\mathbf{H}_{int} = k\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2$$

Notre but ici ne sera pas de démontrer qu'une interaction locale entre deux qubits conduit à un Hamiltonien d'interaction de cette forme, c'est un résultat de la physique quantique que nous admettrons.

2.3.2 Hamiltonien de contrôle

De plus, on admettra que par l'action d'un champ électromagnétique sur l'atome $i = 1, 2$ a pour effet d'ajouter un Hamiltonien au système de la forme

$$\mathbf{H}_i(t) = \frac{u_i(t)}{2}\mathbf{X}_i + \frac{v_i(t)}{2}\mathbf{Y}_i + \frac{w_i(t)}{2}\mathbf{Z}_i$$

où u_i , v_i et w_i sont des fonctions réelles que l'on peut choisir librement. En pratique, ce champ électromagnétique est généré par un laser, dont la phase et l'intensité vont déterminer les fonctions u_i , v_i et w_i . Nous n'étudierons pas non plus la façon dont on peut créer ces Hamiltoniens, nous allons nous concentrer sur le contrôle de l'équation de Schrödinger grâce à ces fonctions u_i , v_i et w_i .

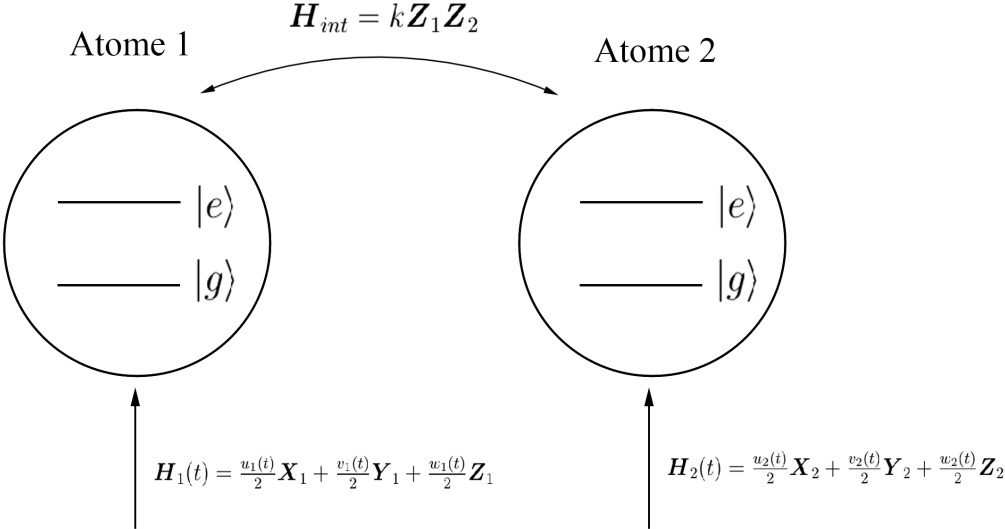


FIGURE 2.2 – Schéma de la paire de Qubits avec les Hamiltoniens d’interaction et de contrôle.

Chapitre 3

Contrôle du système idéal

On peut se demander, pourquoi essayer de modéliser un système idéal (i.e simplifié) alors qu'on pourrait directement modéliser le système réel ? Il se trouve que modéliser un système simplifié a tout d'abord eu une vertu pédagogique au début de mon S3 Recherche, mais surtout, il sera beaucoup plus simple de trouver des lois de contrôle pour le système simplifié que nous allons ensuite adapter au système plus complexe. Trouver des lois directement pour le système complexe est bien plus ardu.

De plus, si nos simulations ne fonctionnent pas dans le cas du modèle simplifié, nous saurons directement que ce n'est pas la peine de continuer dans cette voie, il ne sera pas utile de modéliser le système complexe.

3.1 Hypothèses

Nous allons donc imposer des hypothèses simplificatrices. Nous supposons que :

- Le système quantique est fermé, il n'a aucune interaction avec l'extérieur.
- Son état $|\psi\rangle$ est connu à tout instant.

3.2 Contrôle en boucle ouverte

3.2.1 Transformation de l'équation différentielle

Avec une loi de contrôle constante ω sur \mathbf{X} des deux atomes, le Hamiltonien du couple de Qubits s'écrit :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{int} + \frac{\omega}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)$$

Définissons ξ , la variable d'état du système tournant :

$$\xi(t) = e^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}|\psi\rangle$$

Ainsi, en utilisant l'équation de Schrödinger 2.4 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi(t) &= \frac{i\omega}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)e^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}|\psi\rangle - e^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}i\mathbf{H}|\psi\rangle \\ &= 0 - ie^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{H}_{int}|\psi\rangle \\ &= -ike^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2|\psi\rangle \end{aligned}$$

Comme \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 commutent

$$e^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)} = e^{\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_1} \cdot e^{\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_2}$$

On remarquera également que \mathbf{X}_i et \mathbf{Z}_j commutent si $i = j$ et anticommulent si $i \neq j$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi(t) &= -ike^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2|\psi\rangle \\ &= -ike^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2e^{-\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\xi(t) \text{ par définition de } \xi \\ &= -ike^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2e^{-\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_1}e^{-\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_2}\xi(t) \\ &= -ike^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1e^{-\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_1}\mathbf{Z}_2e^{-\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_2}\xi(t) \quad (\text{Eq : 2.1}) \\ &= -ike^{\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}(e^{\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_1}\mathbf{Z}_1)(e^{\frac{i\omega t}{2}\mathbf{X}_2}\mathbf{Z}_2)\xi(t) \quad (\text{Eq : 2.2}) \\ &= -ike^{i\omega t(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\xi(t) \end{aligned}$$

Nous allons travailler sur cette équation plutôt que sur celle en $|\psi\rangle$ car nous pourrons la simplifier grâce à l'approximation dite du champ tournant.

3.2.2 Approximation du champ tournant

Simplifions l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -ike^{i\omega t(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\xi(t)$$

Pour cela, nous allons ajouter une hypothèse afin de pouvoir la résoudre analytiquement. Nous allons supposer $|\frac{\omega}{k}| \gg 1$, ce n'est pas vraiment contraignant puisque k est une donnée du système et ω est une valeur que nous pouvons fixer librement dans les limites de la puissance de l'actionneur.

Nous allons maintenant utiliser ce que l'on appelle l'approximation du champ tournant (cf

figure 3.1). C'est-à-dire que si $|\frac{\omega}{k}| \gg 1$ on peut remplacer $e^{i\omega t(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)}$ par sa valeur moyenne temporelle. Montrons que :

$$k e^{i\omega t(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 \approx \frac{k}{2} (\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2) = \mathbf{H}_{eff}$$

où \mathbf{H}_{eff} est le Hamiltonien effectif du système tournant.

Démonstration. Tout d'abord, comme $\mathbf{X}_i^2 = \mathbf{I}$, on a par 2.7 :

$$e^{i\omega t \mathbf{X}_i} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \mathbf{X}_i$$

Comme \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 commutent, l'exponentielle de leur somme est le produit des exponentielles, ainsi :

$$\begin{aligned} e^{i\omega t(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 &= \left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 + i \sin(\omega t) \cos(\omega t) (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \right) \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 \\ &= \cos^2(\omega t) \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 - \sin^2(\omega t) \mathbf{X}_1 \mathbf{Z}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{Z}_2 + i \sin(\omega t) \cos(\omega t) (\mathbf{X}_1 \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{Z}_2) \end{aligned}$$

Or d'après, 2.6 $\mathbf{X}_i \mathbf{Z}_i = -i \mathbf{Y}_i$ donc :

$$e^{i\omega t(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 = \cos^2(\omega t) \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \sin^2(\omega t) \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 + \sin(\omega t) \cos(\omega t) (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[e^{i\omega t(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2)$$

□

L'équation que nous avons devient alors

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = -i \mathbf{H}_{eff} \xi(t)$$

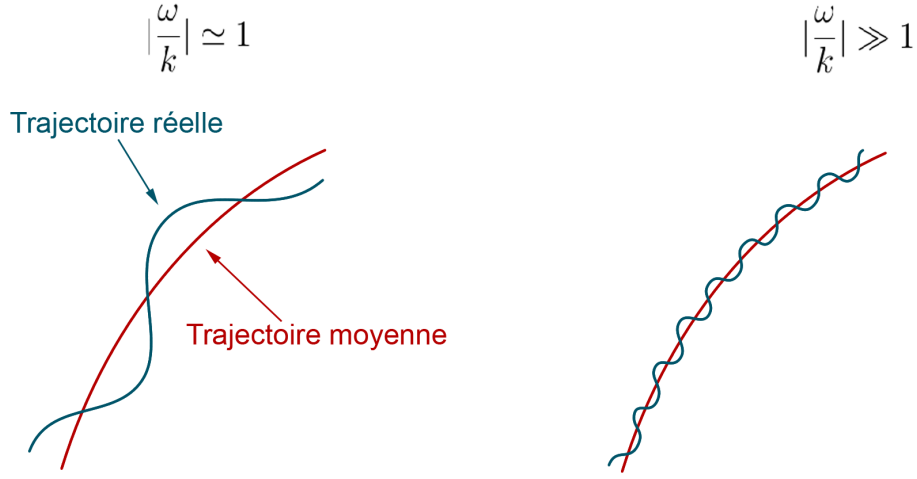


FIGURE 3.1 – Illustration de l'approximation du champ tournant. Plus le rapport $|\frac{\omega}{k}|$ est grand, plus la trajectoire réelle est proche de la trajectoire moyenne.

3.2.3 Maximisation de l'intrication à T_0

Cela est très utile, la nouvelle matrice Hamiltonienne est constante, et, grâce à sa forme, il va être aisé de former son exponentielle.

En effet, il suffit de remarquer que $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2$ et $\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2$ commutent :

$$[\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2, \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2] = \mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{Y}_2 - (-\mathbf{Z}_1\mathbf{Y}_1)(-\mathbf{Z}_2\mathbf{Y}_2) = 0$$

Ainsi $e^{-it\mathbf{H}_{eff}} = e^{-\frac{ikt}{2}\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2} \cdot e^{-\frac{ikt}{2}\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}$. De plus, comme $(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2)^2 = (\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2)^2 = \mathbf{I}_4$ nous pouvons utiliser la relation 2.3. Finalement et après calculs :

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)} \left(\cos^2\left(\frac{kt}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - i \sin\left(\frac{kt}{2}\right) \cos\left(\frac{kt}{2}\right)(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2) \right) |\psi\rangle_{t=0}$$

Si le système est initialement dans son état d'énergie le plus faible alors $|\psi\rangle_{t=0} = |gg\rangle$. En pratique, cet état initial est facile à obtenir.

Par calcul en injectant la condition initiale dans l'équation ci-dessus, on obtient un expression de la concurrence simple : $\mathcal{C}(\psi) = \sin^2(kt)$. Ainsi, on remarque que pour $T_0 = \frac{\pi}{2k}$, $\mathcal{C}(\psi_{T_0}) = 1$. Le ket associé à cette concurrence maximale est :

$$|\psi\rangle_{T_0} = \left(\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4k}\right) - \frac{1+i}{2} \right) |gg\rangle - \frac{i}{2} \sin^2\left(\pi\frac{\omega}{2k}\right) (|eg\rangle + |ge\rangle) + \left(\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4k}\right) - \frac{1-i}{2} \right) |ee\rangle \quad (3.1)$$

Nous avons donc montré qu'avec un contrôle constant ($u_i = \omega \gg k$) et un état initial séparable, nous pouvons créer une trajectoire qui maximise la concurrence à $t = T_0 = \frac{\pi}{2k}$.

3.2.4 Conserver l'intrication

Proposition 3.2.1. *Pour une loi de contrôle de référence nul, c'est-à-dire $u_i = v_i = w_i = 0$, on a :*

$$\mathcal{C}(\psi_t) = \mathcal{C}(\psi_{T_0}) = 1, \forall t \geq T_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$$

Démonstration. Démontrons la condition nécessaire et la condition suffisante.

- Condition nécessaire : On sait d'après l'équation 3.1 page 19 que :

$$|\psi\rangle_{T_0} = \left(\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4k}\right) - \frac{1+i}{2} \right) |gg\rangle - \frac{i}{2} \sin^2\left(\frac{\pi\omega}{2k}\right) (|eg\rangle + |ge\rangle) + \left(\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4k}\right) - \frac{1-i}{2} \right) |ee\rangle$$

De plus, comme $|\psi\rangle$ vérifie l'équation de Schrödinger sans Hamiltonien de contrôle : $|\psi\rangle = \mathbf{M}(t - T_0)|\psi\rangle_{T_0}$ où

$$\mathbf{M}(t) = e^{-ikt\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2} = \cos(kt) - i \sin(kt) \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = e^{-ikt} (|gg\rangle\langle gg| + |ee\rangle\langle ee|) + e^{ikt} (|ge\rangle\langle ge| + |eg\rangle\langle eg|)$$

En utilisant la définition de la concurrence,

$$1 = \mathcal{C}(\psi_t) = \frac{1}{2} \left| \underbrace{\left(\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4k}\right) - \frac{1+i}{2} \right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4k}\right) - \frac{1-i}{2} \right)}_A e^{-4ikt} + \underbrace{\frac{1}{4} \sin^4\left(\frac{\pi\omega}{2k}\right)}_B \right|$$

Pour imposer une concurrence constante égale à 1, il faut avoir $A = 0$ ou $B = 0$. Or $A \neq 0$ car les cosinus sont réels. Nous imposons donc $B = 0 \Rightarrow \frac{\pi\omega}{2k} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$.

- Condition suffisante : si on impose $\frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$, nous créons un ket particulier, ce que l'on appelle une paire de Bell :

$$|\psi\rangle_{T_0} = \frac{e^{\pm \frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} |gg\rangle + \frac{e^{\mp \frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} |ee\rangle \quad (3.2)$$

On peut vérifier que la concurrence vaut alors 1 $\forall t \geq T_0$. Puisque $|\psi\rangle$ est solution de Schrödinger, $|\psi\rangle = \mathbf{M}(t - T_0)|\psi\rangle_{T_0}$ avec \mathbf{M} défini ci-dessus. En calculant $|\psi\rangle_t$ pour $|\psi\rangle_{T_0}$ défini ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\psi_t) &= \frac{1}{2} \left| \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1+i}{2} \right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1-i}{2} \right) \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Ainsi, si on impose une condition supplémentaire : $\frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$, on crée une trajectoire dont la concurrence est maximale à chaque instant $t \geq T_0$ en stoppant tout simplement le contrôle.

3.3 Bilan sur la trajectoire de référence

Nous avons trouvé une trajectoire de référence permettant de maximiser l'intrication de notre système en temps infini. La fonction d'onde $|\psi\rangle$ suivant cette trajectoire sera notée $|\psi_{ref}\rangle$ et nous allons définir les fonctions de contrôle assurant le suivi de cette trajectoire de référence.

- Nous remarquons qu'entre 0 et T_0 il n'y a un contrôle que sur les matrices \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 donc seuls u_1 et u_2 sont non nuls. Ils sont même égaux à une valeur constante ω .
 - Pour $t \geq T_0$, il n'y a plus de contrôle, toutes les fonctions u_i, v_i, w_i , sont nulles.
- Ainsi, le Hamiltonien de notre système de référence est

$$\mathbf{H}_{ref}(t) = \mathbf{H}_{int} + \frac{u_{ref}(t)}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2), \quad (3.3)$$

où $t \mapsto u_{ref}(t)$ est défini de la façon suivante :

$$u_{ref}(t) = \omega \mathbf{1}_{[0, T_0]}(t) = \begin{cases} \omega, & \text{si } t \in [0, T_0]; \\ 0, & \text{si } t \geq T_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Cependant, ce n'est pas en ayant simplement trouvé une loi de contrôle en boucle ouverte que notre problème est résolu. Pour suivre cette trajectoire de référence, il faut satisfaire plusieurs hypothèses de façon totalement exacte. Par exemple, on peut montrer que si on n'a pas exactement $\frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$, la concurrence du système ne reste pas à 1 mais oscille.

De plus, pour trouver cette trajectoire de référence, nous avons simplifié le système avec l'approximation du champ tournant 3.2.2, le système réel ne se comportera donc pas exactement comme celui de référence quand bien même toutes les hypothèses seraient parfaitement vérifiées (ce qui est expérimentalement impossible). Le suivi de la trajectoire de référence sera donc assuré par un contrôle en boucle fermée.

3.4 Contrôle en boucle fermée

3.4.1 Construction de la fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est souvent une fonction similaire à l'énergie du système. Cependant, dans notre cas, notre fonction de Lyapunov sera plutôt une fonction **distance** entre l'état de référence et l'état actuel.

Au début de mon semestre, j'avais travaillé avec la fonction $V(\psi) = \frac{1}{2}||\psi - \psi_{ref}||^2$. Cette fonction semble adéquate : elle est positive, nulle si et seulement $\psi = \psi_{ref}$ et on peut trouver des fonctions de contrôle u_i, v_i et w_i telles que sa dérivée soit négative.

Pourtant, cette fonction n'exploite pas la nature quantique de la fonction d'onde. En effet, comme nous l'avions dit en 2.2.1 ce n'est pas ψ en soit qui porte un sens physique mais

$|\psi\rangle$. Le problème majeur de cette fonction de Lyapunov est que $V(\psi) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = |\psi_{ref}\rangle$ alors que, comme dit dans 2.1.3 page 9, nous souhaitons plutôt une mesure de distance qui a un sens physique, c'est-à-dire que nous préférierions $V(\psi) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle \simeq |\psi_{ref}\rangle$, ce qui est moins contraignant que l'égalité totale entre ces deux ket.

Ainsi, on pourra remarquer que $V(\psi) = 1 - |\langle\psi|\psi_{ref}\rangle|^2$ est aussi une fonction candidate de Lyapunov.

Proposition 3.4.1. *V vérifie*

1. $0 \leq V(\psi) \leq 1$
2. $V(\psi) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle \simeq |\psi_{ref}\rangle$
3. $V(\psi) = 1 \Leftrightarrow \langle\psi|\psi_{ref}\rangle = 0$

Démonstration.

1. Comme $\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \langle\psi_{ref}|\psi_{ref}\rangle$ (relation de normalisation), l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne $|\langle\psi|\psi_{ref}\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\psi_{ref}|\psi_{ref}\rangle = 1 \Leftrightarrow V(\psi) \geq 0$.
Nous avons également $|\langle\psi|\psi_{ref}\rangle|^2 \geq 0$, d'où $V(\psi) \leq 1$.
2. Si $V(\psi) = 0$ alors $|\langle\psi_{ref}|\psi_{ref}\rangle|^2 = 1 = \langle\psi|\psi\rangle\langle\psi_{ref}|\psi_{ref}\rangle$. On est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, donc $\exists \lambda \in \mathbb{C}, |\psi\rangle = \lambda|\psi_{ref}\rangle$. Comme $|\psi\rangle$ et $|\psi_{ref}\rangle$ sont normés, $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \lambda = e^{i\theta}$. Ainsi $\exists \theta \in \mathbb{R}, |\psi\rangle = e^{i\theta}|\psi_{ref}\rangle$, cela signifie que l'état réel et l'état de référence sont identiques au sens de la relation d'équivalence 2.2.1.
La condition suffisante est triviale : si $|\psi\rangle \simeq |\psi_{ref}\rangle$ alors $\langle\psi|\psi_{ref}\rangle = 1$ d'où $V(\psi) = 0$.
3. Immédiat par définition de V .

□

Ainsi, nous avons montré que $V(\psi) = 1 - |\langle\psi|\psi_{ref}\rangle|^2$ dispose de propriétés intéressantes, ce sera donc notre fonction candidate de Lyapunov.

3.4.2 Loi de contrôle

Nous allons désormais chercher une loi de contrôle pour le système, c'est-à-dire que nous allons chercher des fonctions u_i, v_i, w_i qui assurent que $\dot{V} \leq 0$.

Ces méthodes ont été établies par P. Rouchon et M. Mirrahimi [6].

Dérivons alors la fonction V et trouvons une condition suffisante pour assurer sa décroissance.

Tout d'abord, on rappelle que $|\psi\rangle$ et $|\psi_{ref}\rangle$ sont soumises à l'équation de Schrödinger.

- $\frac{d}{dt}|\psi_{ref}\rangle = -i\mathbf{H}_{ref}|\psi_{ref}\rangle$. Le Hamiltonien associé est \mathbf{H}_{ref} défini en 3.3 page 21.
- $\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -i\mathbf{H}|\psi\rangle$. Le Hamiltonien du système est cette fois le Hamiltonien total avec le contrôle en boucle fermé

$$\mathbf{H} = \underbrace{k\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}_{\mathbf{H}_{int}} + \underbrace{\sum_{i=1}^2 \frac{u_i(t)}{2}\mathbf{X}_i + \frac{v_i(t)}{2}\mathbf{Y}_i + \frac{w_i(t)}{2}\mathbf{Z}_i}_{\mathbf{H}_{cont}}$$

Pour simplifier les notations nous appellerons \mathbf{H}_{cont} le Hamiltonien de contrôle et on appelle $(f_j)_{0 \leq j \leq 6}$ les fonctions u_i, v_i, w_i tel que $f_1 = u_1 \dots f_6 = w_2$. De même, nous appellerons $(\mathbf{M}_j)_{0 \leq j \leq 6}$ les matrices $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i$ tel que $\mathbf{M}_1 = \mathbf{X}_1 \dots \mathbf{M}_6 = \mathbf{Z}_2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle \psi | \psi_{ref} \rangle &= \frac{d}{dt} (\langle \psi |) | \psi_{ref} \rangle + \langle \psi | \frac{d}{dt} (| \psi_{ref} \rangle) \\
 &= (-i \mathbf{H} | \psi \rangle)^\dagger | \psi_{ref} \rangle + \langle \psi | (-i \mathbf{H}_{ref} | \psi_{ref} \rangle) \\
 &= i \langle \psi | \mathbf{H} - \mathbf{H}_{ref} | \psi_{ref} \rangle \\
 &= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^6 (f_j - f_j^{ref}) \langle \psi | \mathbf{M}_j | \psi_{ref} \rangle
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(\psi) &= -\frac{d}{dt} (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \psi \rangle) \\
 &= -\frac{d}{dt} (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle) \langle \psi_{ref} | \psi \rangle - \left(\frac{d}{dt} (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle) \langle \psi_{ref} | \psi \rangle \right)^* \\
 &= -2 \Re \left(\frac{d}{dt} (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle) \langle \psi_{ref} | \psi \rangle \right) \\
 &= -\Re \left(i \sum_{j=1}^6 (f_j - f_j^{ref}) \langle \psi | \mathbf{M}_j | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \psi \rangle \right) \\
 &= -\sum_{j=1}^6 (f_j - f_j^{ref}) \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{M}_j | \psi \rangle)
 \end{aligned}$$

Nous devons donc choisir les fonctions f_j telles que $\frac{d}{dt} V(\psi) \leq 0$.

On peut remarquer que c'est le cas pour

$$f_j = f_j^{ref} + g_j \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{M}_j | \psi \rangle)$$

où g_j est un gain strictement positif, i.e $g_j > 0$. Pour des raisons de simplicité, nous choisirons $g_j = g \forall j$, une constante que nous choisiront grâce aux simulations. Ainsi, comme $u_{ref}(t) = \omega \mathbf{1}_{[0, T_0]}$ (cf équation 3.4), nous avons :

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \omega \mathbf{1}_{[0, T_0]}(t) + g \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{X}_1 | \psi \rangle) \\
 u_2(t) &= \omega \mathbf{1}_{[0, T_0]}(t) + g \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{X}_2 | \psi \rangle) \\
 v_1(t) &= g \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{Y}_1 | \psi \rangle) \\
 v_2(t) &= g \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{Y}_2 | \psi \rangle) \\
 w_1(t) &= g \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{Z}_1 | \psi \rangle) \\
 w_2(t) &= g \cdot \Im (\langle \psi | \psi_{ref} \rangle \langle \psi_{ref} | \mathbf{Z}_2 | \psi \rangle)
 \end{aligned}$$

3.5 Simulations

Nous allons dans cette section comparer les résultats des lois de contrôle en boucle ouverte et en boucle fermée et tester leur robustesse.

Hypothèses de la simulation

Nous avons ajouté des erreurs afin de tester la robustesse des lois. La trajectoire de référence est calculée au préalable de façon théorique avec comme données :

- $|\psi_{ref}\rangle_0 = |gg\rangle$
- $k_{ref} = 1$ et $\omega_{ref} = 4$
- Nous intégrons toutes les équations différentielles avec un pas de temps de 0.01 SI (en unités SI car nous avons choisi $\hbar = 1$).

On peut remarquer que nous avons déjà violé une hypothèse qui assure que le modèle réel pourra se comporter comme le système de référence : $|\frac{\omega_{ref}}{k_{ref}}| \gg 1$. Normalement, la trajectoire de référence devrait être dure à suivre pour le système réel, car l'approximation du champ tournant dans notre cas est très grossière.

Nous avons choisi d'ajouter des erreurs pour le système réel :

- $|\psi\rangle_0 = |eg\rangle$. On simule une erreur d'état initial.
- $k = 0.95$ et $\omega = 4.8$. On a 5% d'erreur sur k et 20% d'erreur sur ω , on simule le fait que k et ω ont été mal mesurés est que les k et ω réels sont différents de ceux choisis en référence.
- Nous ajoutons un retard sur la commande de 15 pas de temps.

Ainsi, nous n'avons pas non plus $|\frac{\omega}{k}| \gg 1$ mais de plus, nous n'avons plus non plus $\frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$ puisque $\frac{\omega}{k} = 5.053$.

Gains : En testant en simulation, les gains suivants ont été choisis empiriquement.

- Pendant la phase de création de l'intrication $t \in [0, T_0]$, nous avons choisi

$$g = 0.8 \cdot \omega = 3.84$$

- Pendant la phase de conservation de l'intrication $t \geq T_0$, nous avons choisi

$$g = 5 \cdot k = 4.75$$

Par ailleurs, nous avons également imposé $v_i = 0 = w_i$, le système étant déjà contrôlable, il suffit des u_i pour le faire converger.

Courbes

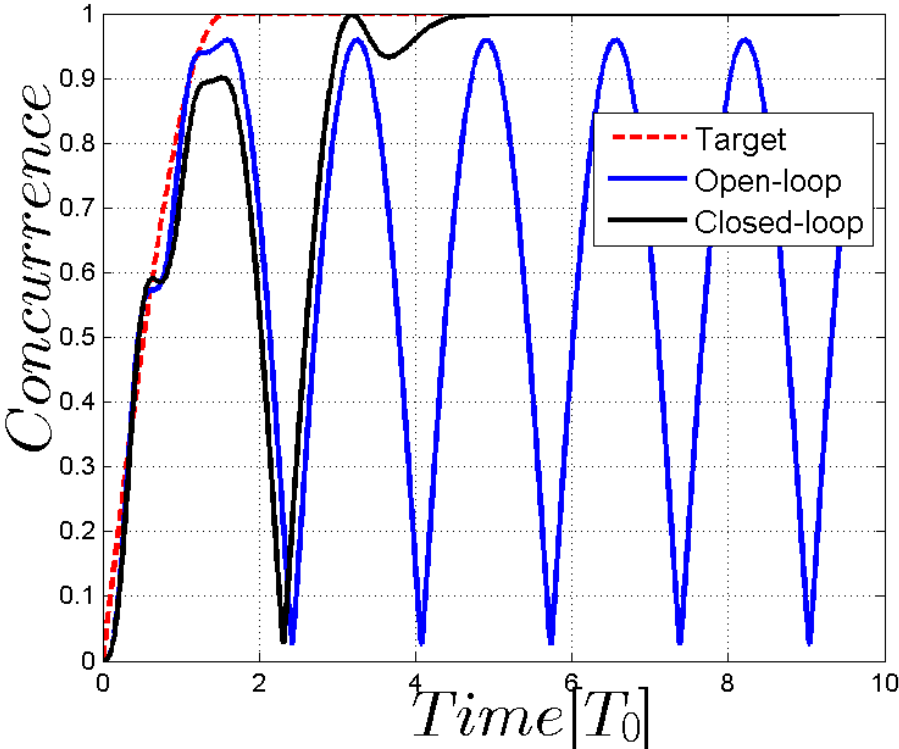


FIGURE 3.2 – Évolution de la concurrence au cours du temps. On remarque que le système bouclé converge vers une concurrence de 100% alors que le système sans rétroaction voit sa concurrence osciller entre 3% et 95%.

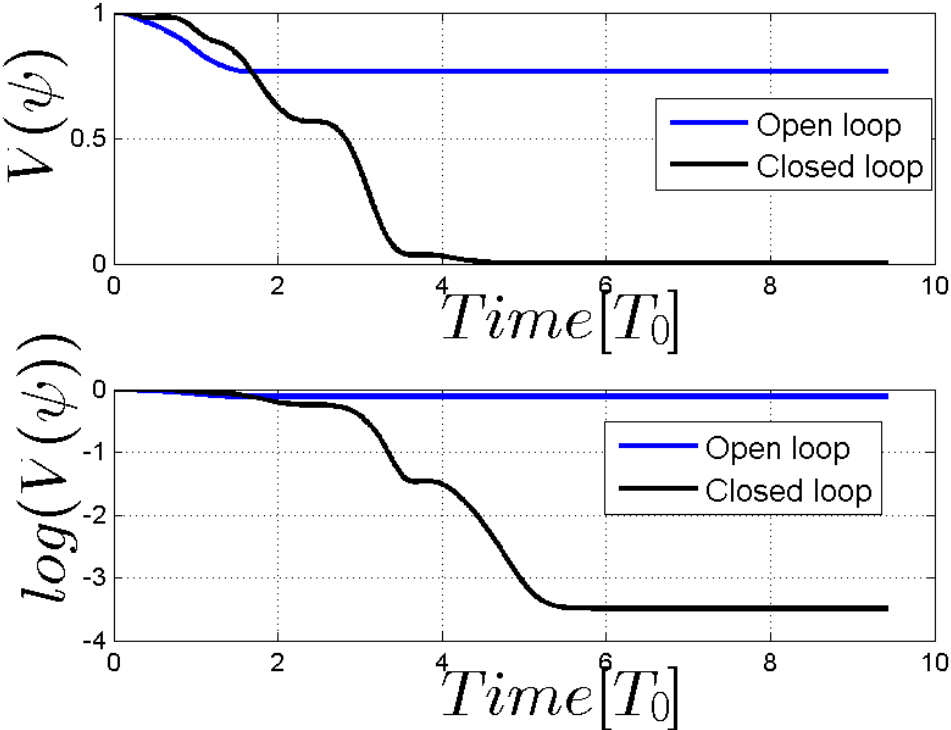


FIGURE 3.3 – Évolution de la fonction de Lyapunov en échelle classique et en échelle logarithmique. On remarque très clairement que la rétroaction permet d’obtenir une grande précision alors qu’en boucle ouverte nous n’arrivons même pas à approcher $|\psi_{ref}\rangle$.

Chapitre 4

Contrôle du système réel

Nous allons ici étudier le système de façon beaucoup plus rigoureuse en considérant que :

- Notre système peut avoir des interactions avec l'extérieur.
- Nous ne connaissons pas son état à chaque instant.
- Notre matériel expérimental n'est pas parfait non plus.

4.1 Les systèmes quantiques ouverts

4.1.1 Matrice densité

Les fonctions d'ondes sont extrêmement utiles pour décrire des systèmes quantiques. Cependant, lors que le système est ouvert, c'est-à-dire qu'il soumis à des interactions avec l'extérieur, de nouveaux effets indésirables apparaissent, et décrire l'état du système avec $|\psi\rangle$ n'est plus possible. En effet, il n'y aurait plus seulement $|\psi\rangle$ du système, mais également les états des systèmes extérieurs! Nous allons alors décrire l'état du système par ρ que l'on appelle la matrice densité. Pour la paire que Qubits, $\rho \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

On peut comprendre ρ comme la somme des projecteurs sur les états des systèmes qui interagissent : $\rho = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ où les α_i sont des facteurs de normalisation tels que $\sum_i \alpha_i = 1$. Pour un système quantique fermé, la seule fonction d'onde en jeu est celle de la paire de Qubits, et donc $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Dans ce cas, on dit qu'on est dans un état **pur**. Dans le cas contraire, on dit qu'on est dans un état **mixte**.

Exemple 4.1.1. $\rho = \frac{1}{4}\mathbf{I}$ représente un état mixte non intriqué.

4.1.2 Concurrence

Malheureusement, on ne peut pas étendre la caractérisation de la concurrence que nous avons utilisée précédemment pour le système fermé de deux Qubits. L'article [4] nous

donne une formule explicite de la concurrence pour la paire de deux Qubits.

En [4], nous avons

$$\mathcal{C}(\psi) = |\langle \psi | \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 | \psi^* \rangle|$$

On pourrait alors essayer d'étendre cette formule en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\rho) &= \left(\langle \psi | \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 | \psi^* \rangle \langle \psi^* | \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 | \psi \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \text{ car } \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 \text{ est réelle.} \\ &= \left(\text{Tr}(\rho \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 \rho^* \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Mais cela ne fonctionne pas. Par exemple, pour $\rho = \frac{1}{4} \mathbf{I}$ qui est un état mixte non intriqué, on obtient $\mathcal{C}(\rho) = \frac{1}{2}$, c'est absurde. L'article [4] nous donne une formule pour calculer cette concurrence.

On considère λ_i , $i = 1..4$ les valeurs propres de la matrice $(\rho \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2 \rho^* \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2)^{\frac{1}{2}}$ (qui sont définies car ces matrices sont hermitiennes). La concurrence est :

$$\mathcal{C}(\rho) = \max \left(0, 2 \max_i (\lambda_i) - \sum_i \lambda_i \right) \quad (4.1)$$

4.1.3 Mesure et décohérence

Considérations générales

Contrairement la partie 3, nous ne supposons plus que nous avons accès à l'état de notre système à tout instant, il nous faut faire des observations sur le système afin de pouvoir estimer son état.

Or l'une des particularités de la physique quantique est que l'observation modifie l'état du système : cela est donc un phénomène qu'il nous faudra prendre en compte, et il faut avoir conscience que cette modification de l'état du système ne va pas du tout dans notre sens, au contraire, cela a tendance à **briser l'intrication** de notre système.

De plus, par observation, on entend toutes les interactions avec l'extérieur, et donc il y a les mesures volontaires, celles que l'on effectue pour obtenir des informations sur le système, ainsi que des mesures involontaires, dues à une mauvaise isolation du système. Ces mesures involontaires, donc non lues, provoquent l'effondrement de la fonction d'onde : c'est ce que l'on appelle la décohérence quantique. De fait, cela détruit l'intrication du système.

Nous modéliserons ces deux effets dans les simulations.

La mesure en pratique

Nous allons considérer dans nos simulations que nous faisons une mesure selon \mathbf{Z}_i , $i = 1, 2$ de chaque atome régulièrement.

De plus, nous allons considérer que les détecteurs quantiques chargés de mesurer les données du systèmes sont imparfaits, ils ont une efficacité de détection $\eta \leq 1$.

4.1.4 Fidélité et nouvelle fonction de Lyapunov

Nous avons parlé de distance entre deux ket en 3.4.1 page 21. Par exemple

$$(\phi, \psi) \mapsto 1 - |\langle \phi | \psi \rangle|^2$$

était une distance très intéressante, nous en avons déduit notre fonction de Lyapunov. Comme

$$\begin{aligned} |\langle \phi | \psi \rangle|^2 &= \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle \\ &= \text{Tr}(\langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle) \\ &= \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi| \cdot |\phi\rangle \langle \phi|) \end{aligned}$$

On peut alors se dire que la fonction

$$(\rho, \sigma) \mapsto 1 - \text{Tr}(\rho \sigma)$$

sera également intéressante et pourra être notre nouvelle fonction de Lyapunov. Mais nous allons devoir nous en assurer.

Il est possible pour un système quantique ouvert que $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ et donc $1 - \text{Tr}(\rho \rho) > 0$. Cela ne satisfait pas la propriété de base d'une distance. Nous allons donc faire appel à la notion de fidélité qui nous permettra de construire une distance ayant de bonnes propriétés sur les systèmes quantiques ouverts.

Par définition, la fidélité est :

$$F(\rho, \sigma) = \left(\text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right) \right)^2$$

où $\sqrt{\rho}$ désigne la racine de la matrice ρ que l'on peut définir puisque ρ est hermitienne positive par définition.

La fidélité va jouer le rôle du terme $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ que nous avons dans notre précédente fonction de Lyapunov.

Proposition 4.1.2. *La fidélité vérifie les propriétés suivantes :*

1. $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$
2. $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$ et
3. Si ρ est pur ($\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$) alors $F(\rho, \sigma) = \langle \psi | \sigma | \psi \rangle$
4. Si ρ et σ sont purs ($\rho = |\psi\rangle \langle \psi|, \sigma = |\phi\rangle \langle \phi|$) alors $F(\rho, \sigma) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2$

Ainsi $1 - F(\rho, \sigma)$ est une distance qui semble appropriée.

Maintenant, rappelons-nous que $\rho_{ref} = |\psi_{ref}\rangle \langle \psi_{ref}|$ est donc un état pur. Donc, $F(\rho, \rho_{ref}) = \langle \psi_{ref} | \rho | \psi_{ref} \rangle = \text{Tr}(\rho_{ref} \rho)$ d'après la propriété 3. Cela est très important, cela signifie que la fonction

$$V(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho_{ref} \rho)$$

aura bien toutes les propriétés souhaitées, nous allons donc la choisir comme fonction de Lyapunov.

De plus, nous allons pouvoir définir les "tracking" et "knowledge" errors grâce à cette distance.

L'erreur de tracking sera tout simplement

$$\text{Tracking error} = 1 - F(\rho, \rho_{ref}) = V(\rho)$$

L'erreur d'estimation sera alors

$$\text{Knowledge error} = 1 - F(\rho, \hat{\rho})$$

où $\hat{\rho}$ est l'estimée de ρ .

On ne peut pas simplifier plus cette formule car dans le cas général ρ et $\hat{\rho}$ seront des états mixtes.

4.2 Équation d'évolution du système

4.2.1 Équation de Liouville

Maintenant que nous avons introduit ρ la matrice densité (opérateur sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$), nous allons chercher comment l'équation de Schrödinger se réécrit pour ρ . Tout d'abord, nous allons étudier le cas du système quantique fermé, donc dans un état pur : $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho &= \frac{d}{dt}(|\psi\rangle)\langle\psi| + |\psi\rangle\frac{d}{dt}(\langle\psi|) \\ &= -i\mathbf{H}\rho + \rho i\mathbf{H} \\ &= -i[\mathbf{H}, \rho] \end{aligned}$$

C'est l'équation de Liouville/von-Neumann.

4.2.2 Équation stochastique maîtresse en temps continu

Cependant, dans un système quantique ouvert observé, l'évolution temporelle de ρ est régie par la version généralisée de l'équation de Liouville ; l'équation stochastique maîtresse (Stochastic Master Equation). Celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \left(-i[\mathbf{H}, \rho_t] + \sum_{\nu} \mathbf{L}_{\nu}\rho_t\mathbf{L}_{\nu}^{\dagger} - \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{\nu}^{\dagger}\mathbf{L}_{\nu}\rho_t + \rho_t\mathbf{L}_{\nu}^{\dagger}\mathbf{L}_{\nu}) \right) dt \\ &\quad + \sum_{\nu} \sqrt{\eta_{\nu}} \left(\mathbf{L}_{\nu}\rho_t + \rho_t\mathbf{L}_{\nu}^{\dagger} - \text{Tr}((\mathbf{L}_{\nu} + \mathbf{L}_{\nu}^{\dagger})\rho_t)\rho_t \right) dW_{\nu,t} \end{aligned}$$

Dans notre cas, où l'on mesure deux valeurs sur \mathbf{Z}_1 et \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{L}_\nu = \sqrt{2\gamma} \mathbf{Z}_\nu$ où γ dépend de données expérimentales. De plus, le système est également soumis à des perturbations parasites que l'on peut voir comme des mesures non lues qui provoquent de la décohérence. On ajoute alors les termes suivants à l'équation : $\mathbf{V}_1 = \sqrt{2\gamma^-} \mathbf{S} \otimes \mathbf{I}$ et $\mathbf{V}_2 = \sqrt{2\gamma^-} \mathbf{I} \otimes \mathbf{S}$. On remarque la présence de la matrice $\mathbf{S} = |g\rangle\langle e|$ qui est en fait l'effet de la décohérence : elle projette les états excités $|e\rangle$ sur les états non excités $|g\rangle$.
La équation stochastique maîtresse en temps continu s'écrit alors :

$$d\rho_t = \left(-i[\mathbf{H}, \rho_t] + \sum_{j=1}^2 \left(\mathbf{L}_j \rho_t \mathbf{L}_j^\dagger + \mathbf{V}_j \rho_t \mathbf{V}_j^\dagger - \frac{1}{2} (\mathbf{L}_j^\dagger \mathbf{L}_j \rho_t + \rho_t \mathbf{L}_j^\dagger \mathbf{L}_j + \mathbf{V}_j^\dagger \mathbf{V}_j \rho_t + \rho_t \mathbf{V}_j^\dagger \mathbf{V}_j) \right) \right) dt + \sum_{j=1}^2 \sqrt{\eta} \left(\mathbf{L}_j \rho_t + \rho_t \mathbf{L}_j^\dagger - \text{Tr} \left((\mathbf{L}_j + \mathbf{L}_j^\dagger) \rho_t \right) \rho_t \right) dW_{j,t} \quad (4.2)$$

Le résultat d'une mesure est $dy_{j,t} = \sqrt{\eta} \text{Tr} \left((\mathbf{L}_j + \mathbf{L}_j^\dagger) \rho_t \right) + dW_{j,t}$ où $dW_{j,t}$ est un processus de Wiener de moyenne 0, de variance dt et $\eta \in [0, 1]$ est l'efficacité de détection.

4.2.3 Équation stochastique maîtresse en temps discret

En utilisant la formule d'Itô, on peut établir que le schéma de discrétisation suivant conserve la trace, la positivité et l'hermiticité :

$$\rho_{t+dt} = \frac{\mathbf{M}_{dy_t} \rho_t \mathbf{M}_{dy_t}^\dagger + \sum_{j=1}^2 \left((1-\eta) \mathbf{L}_j \rho_t \mathbf{L}_j^\dagger + \mathbf{V}_j \rho_t \mathbf{V}_j^\dagger \right) dt}{\text{Tr} \left(\mathbf{M}_{dy_t} \rho_t \mathbf{M}_{dy_t}^\dagger + \sum_{j=1}^2 \left((1-\eta) \mathbf{L}_j \rho_t \mathbf{L}_j^\dagger + \mathbf{V}_j \rho_t \mathbf{V}_j^\dagger \right) dt \right)} \quad (4.3)$$

où $\mathbf{M}_{dy_t} = \mathbf{I} - \left(i\mathbf{H} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\mathbf{L}_j \mathbf{L}_j^\dagger + \mathbf{V}_j \mathbf{V}_j^\dagger) \right) dt + \sqrt{\eta} \sum_{j=1}^2 dy_{j,t} \mathbf{L}_j$

Ce schéma de discrétisation a été établi par P. Rouchon.

4.3 Filtre quantique

Avec les systèmes réels, contrairement à la partie 3 page 16, nous n'avons pas accès directement à l'état du système. Nous devons estimer ρ . Dans la suite, nous noterons $\hat{\rho}$ l'estimée de ρ .

Le filtre quantique est un observateur qui nous donne une façon de construire $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}_{t+dt} = \frac{\mathbf{M}_{dy_t} \hat{\rho}_t \mathbf{M}_{dy_t}^\dagger + \sum_{j=1}^2 \left((1-\eta) \mathbf{L}_j \hat{\rho}_t \mathbf{L}_j^\dagger + \mathbf{V}_j \hat{\rho}_t \mathbf{V}_j^\dagger \right) dt}{\text{Tr} \left(\mathbf{M}_{dy_t} \hat{\rho}_t \mathbf{M}_{dy_t}^\dagger + \sum_{j=1}^2 \left((1-\eta) \mathbf{L}_j \hat{\rho}_t \mathbf{L}_j^\dagger + \mathbf{V}_j \hat{\rho}_t \mathbf{V}_j^\dagger \right) dt \right)} \quad (4.4)$$

On peut remarquer que cette équation est très semblable à l'équation 4.3, l'information sur le système réel étant la mesure $dy_{j,t}$, cette information est utilisée pour actualiser $\hat{\rho}$ par l'intermédiaire de $\mathbf{M}_{dy_{j,t}}$.

Ce filtre prend par ailleurs en compte l'action de la mesure sur le système !

4.4 Adaptation des lois de contrôle

4.4.1 Contrôle en boucle ouverte

Comme nous allons le voir, le travail que nous avons effectué sur les systèmes fermés idéaux est très important, nous allons en déduire toutes les lois pour les systèmes ouverts.

Pour la trajectoire de référence, nous allons simplement garder le même contrôle

$$u_{ref}(t) = \omega \mathbf{1}_{[0,T_0]}(t)$$

Ainsi, la matrice densité de la trajectoire de référence est :

$$\rho_{ref} = |\psi_{ref}\rangle\langle\psi_{ref}|$$

4.4.2 Contrôle en boucle fermée

De la même façon, nous allons généraliser les lois de contrôle 3.5 page 23 en remarquant que :

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi_{ref}\rangle\langle\psi_{ref}|\mathbf{M}|\psi\rangle &= \text{Tr}(\langle\psi|\psi_{ref}\rangle\langle\psi_{ref}|\mathbf{M}|\psi\rangle) \\ &= \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\psi_{ref}\rangle\langle\psi_{ref}|\mathbf{M}) \\ &= \text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{M}) \end{aligned}$$

Il en découle alors l'actualisation des lois de contrôle avec la formulation en matrices densité :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \omega \mathbf{1}_{[0,T_0]}(t) + g \cdot \Im\left(\text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{X}_1)\right) \\ u_2(t) &= \omega \mathbf{1}_{[0,T_0]}(t) + g \cdot \Im\left(\text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{X}_2)\right) \\ v_1(t) &= g \cdot \Im\left(\text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{Y}_1)\right) \\ v_2(t) &= g \cdot \Im\left(\text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{Y}_2)\right) \\ w_1(t) &= g \cdot \Im\left(\text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{Z}_1)\right) \\ w_2(t) &= g \cdot \Im\left(\text{Tr}(\rho\rho_{ref}\mathbf{Z}_2)\right) \end{aligned}$$

4.5 Simulations

4.5.1 Première simulation

Hypothèses de la simulation

Pour la trajectoire de référence, nous avons choisi

- $\rho_{ref}(t = 0) = |gg\rangle\langle gg|$
- $\hat{\rho}(t = 0) = |gg\rangle\langle gg|$. On peut choisir librement cette valeur.
- $k_{ref} = 1$ et $\omega_{ref} = 10$
- Nous intégrons toutes les équations différentielles avec un pas de temps de 0.01 SI (en unités SI car nous avons choisi $\hbar = 1$).

Là encore, comme dans la précédente simulation, nous n'avons pas vraiment $|\frac{\omega_{ref}}{k_{ref}}| \gg 1$.

Nous avons choisi d'ajouter des erreurs pour le système réel :

- $\rho(t = 0) = \frac{1}{4}\mathbf{I}$. On simule une erreur d'état initial. Là nous avons un état initial complètement mélangé, de concurrence nulle.
- $k = 0.98$ et $\omega = 12$. On a 2% d'erreur sur k et 20% d'erreur sur ω , on simule le fait que k et ω ont été mal mesurés est que les k et ω réels sont différents de ceux choisis en référence.
- Nous ajoutons un retard sur la commande de 10 pas de temps.
- Nous choisissons $2\gamma = \frac{k}{5}$. On considère que nous faisons des observations à un rythme un ordre de grandeur en dessous du temps caractéristique du système. Cette valeur m'a été donnée par Pierre Rouchon car elle est assez réaliste.
- Nous choisissons $2\gamma^- = \frac{k}{50}$. On considère que la décohérence a une influence, mais un ordre de grandeur en dessus de l'effet des observations. Là encore, cette valeur m'a été donnée par Pierre Rouchon car elle est assez réaliste.
- Nous choisissons $\eta = 0.85$. C'est-à-dire que l'on considère que notre détecteur ne réussit à faire que 85% des mesures. En réalité, les détecteurs sont plutôt autour de 50%, j'expliquerai la raison de ce choix en partie 5.1 page 40.

Gains

En testant en simulation, les gains suivants ont été choisis empiriquement.

- Pendant la phase de création de l'intrication $t \in [0, T_0]$, nous avons choisi

$$g = 4 \cdot \omega = 48$$

- Pendant la phase de conservation de l'intrication $t \geq T_0$, nous avons choisi

$$g = 30 \cdot k = 29.4$$

Nous prenons en compte toutes les fonctions u_i, v_i, w_i . Nous remarquons qu'il faut choisir des gains bien plus forts que ceux choisis dans le cas idéal 3.5 page 24.

Courbes

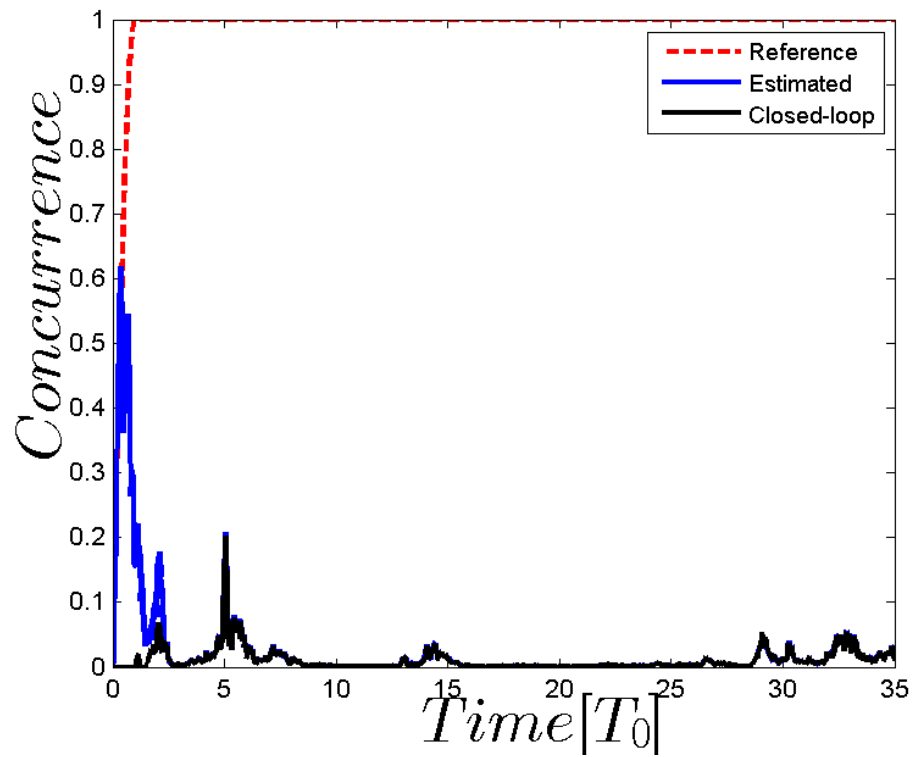


FIGURE 4.1 – Évolution de la concurrence au cours du temps. On remarque que si le filtre quantique semble bien fonctionner (la courbe bleu suit la courbe noire), le contrôle est peu efficace : la concurrence retombe rapidement vers 0.

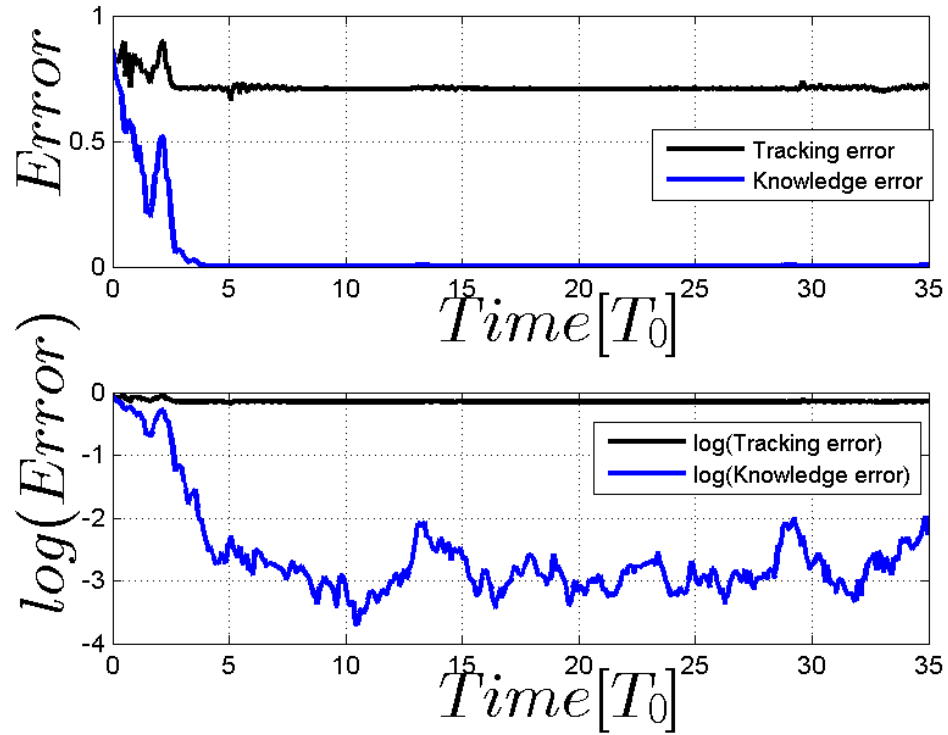


FIGURE 4.2 – Ces courbes confirment ce que l’on pensait : le filtre quantique converge, l’estimation réussit, mais le contrôle échoue, l’erreur de tracking reste élevée, nous ne sommes pas capables de contrer les effets dûs à l’observation et ceux dûs à la décohérence.

Bilan : Tous nos efforts semblent alors réduits à néant, nous n’arrivons pas en adaptant nos lois de contrôle aux systèmes quantiques ouverts à obtenir des résultats satisfaisants.

4.5.2 Deuxième simulation

Ce problème que nous avons soulevé est en fait un problème de contrôlabilité : la trajectoire de référence est très dure à suivre car elle est très régulière. Pour donner une image plus parlante, c’est comme si elle nous avait distancé dès le début et ne nous sommes plus capables de la suivre du tout.

Une idée que j’ai eue est alors de "dégrader" cette trajectoire de référence afin de la rendre plus facile à suivre, i.e d’augmenter la contrôlabilité du système.

Pour la dégrader, on peut choisir d’imposer $|\frac{\omega_{ref}}{k_{ref}}| \in (2\mathbb{Z}+1)$, c’est-à-dire que la concurrence de notre trajectoire de référence va se mettre à osciller en 0 et 100%.

Hypothèses

Nous gardons les mêmes hypothèses que dans la partie précédente, la seule différence sera que $\omega_{ref} = 11$ et nous prenons $\omega = 13.2 = 120\% \cdot \omega_{ref}$.

Courbes

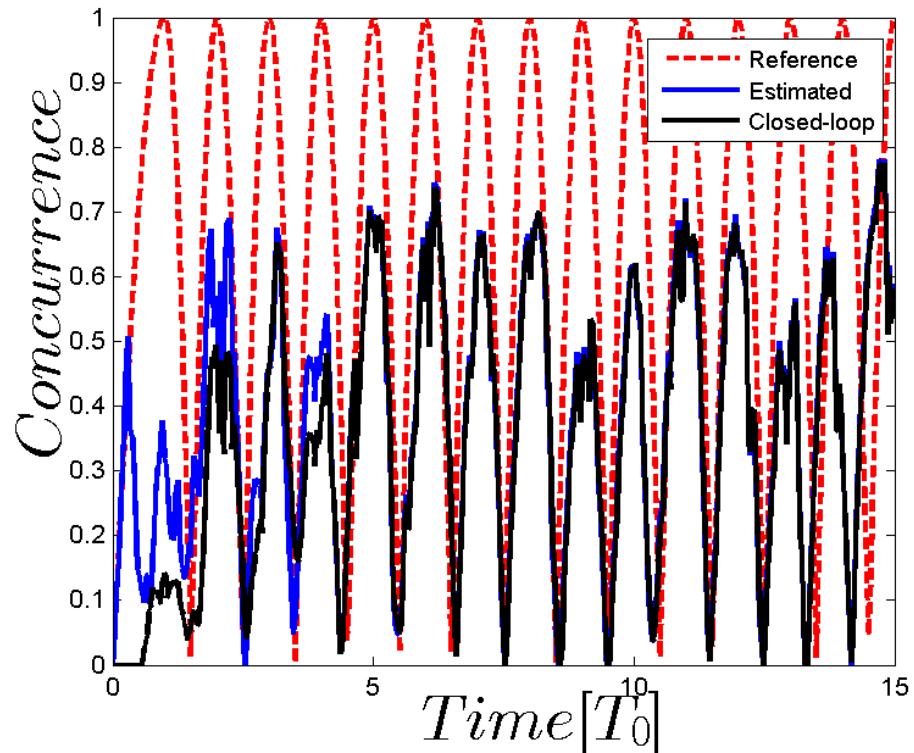


FIGURE 4.3 – Évolution de la concurrence au cours du temps. C’est bien plus intéressant, on remarque qu’on arrive à suivre un peu la trajectoire de référence désormais ! Le filtre quantique semble quant à lui toujours bien marcher. La concurrence moyenne que l’on obtient est autour de 35% avec des pics de concurrence à 70%.

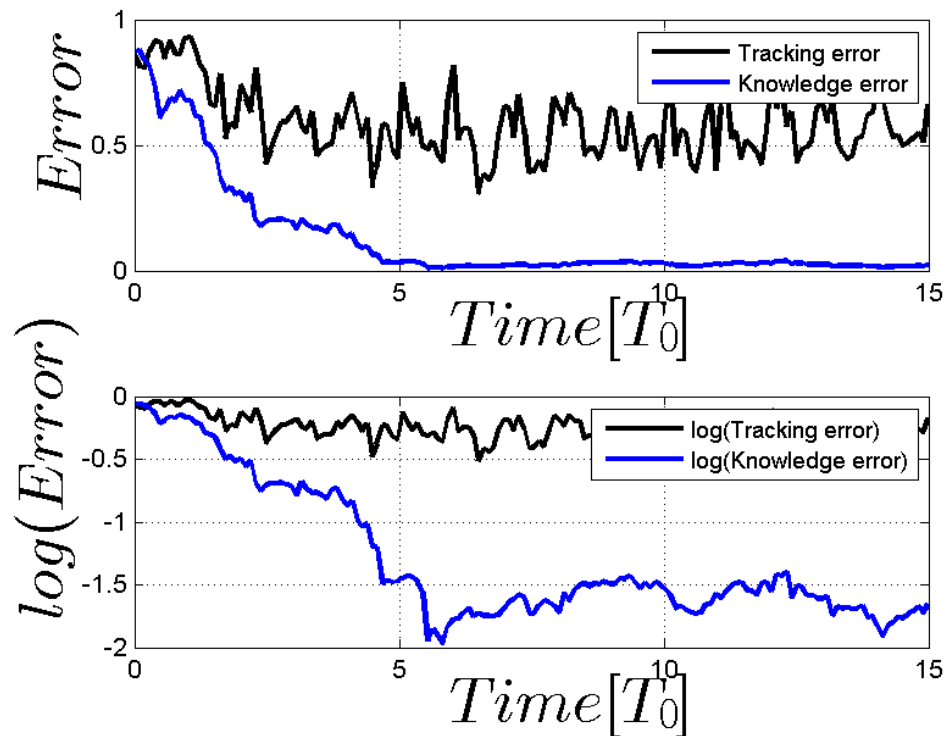


FIGURE 4.4 – Ici on remarque que bien que l’erreur de tracking soit plus faible que dans la simulation précédente, elle n’est toujours pas faible, nous sommes assez loin de ρ_{ref} . Sans retard dans le système, cette erreur de tracking tombe à 0.1. Le filtre quantique fonctionne toujours, avec un peu moins de précision que précédemment, cela est dû au fait que le système varie beaucoup plus, il est plus difficile à suivre.

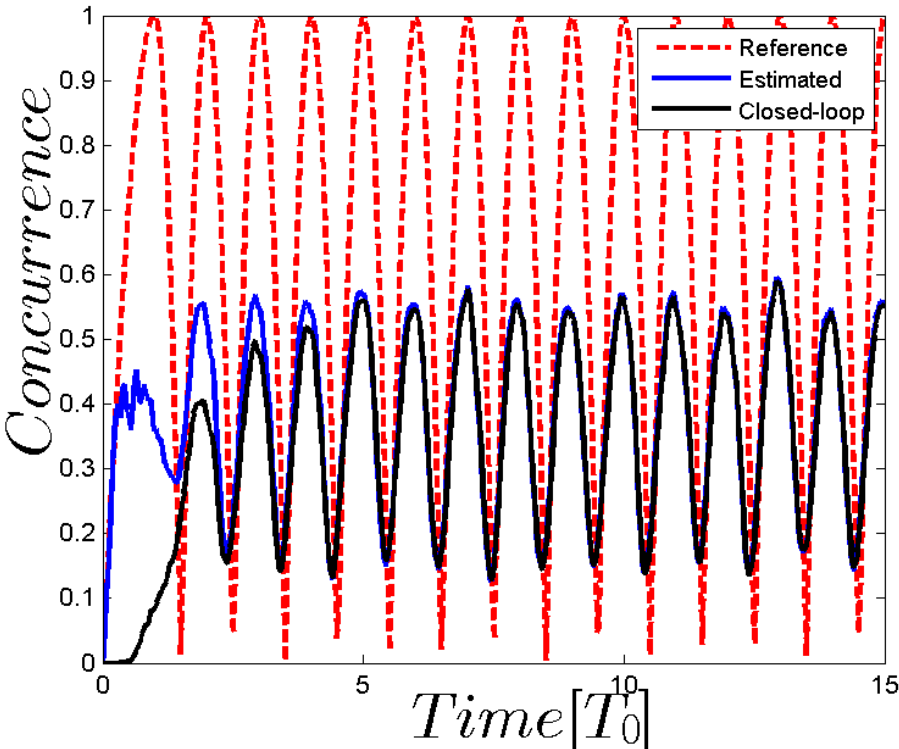


FIGURE 4.5 – Évolution de la concurrence au cours du temps. Cette courbe est une moyenne sur 50 itérations afin de lisser les effets stochastiques et d’observer le comportement en moyenne. on remarque qu’en moyenne on a une concurrence de 38% avec des pics moyens à 56%

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Critique des résultats

Lors de la dernière partie, nous avons obtenu des résultats intéressants : nous avons montré que nous pouvons contrôler dans une certaine mesure l'intrication d'un système de deux Qubits. Il est intéressant de savoir que la question du contrôle de l'intrication de deux Qubits a déjà été étudiée récemment par J.F. Ralph et P. Rouchon en [5]. Avec une méthode totalement différente, J.F. Ralph obtenait une concurrence moyenne de 35% avec $\eta = 0.85$ (ce qui est la raison pour laquelle nous avons fixé un tel η). Nous obtenons alors des résultats assez similaires (moyenne de 38%) à une différence majeure près : nous avons des pics de concurrence (à 60% en moyenne) et nous savons exactement lorsqu'ils se produisent ! Cela est un résultat intéressant qui peut avoir des applications en calcul quantique, il suffirait alors peut-être de faire en sorte que le calcul se termine sur un pic de concurrence.

5.2 Part personnelle

Tout d'abord, rien de tout ceci n'aurait bien évidemment été possible sans mon tuteur P. Rouchon qui m'a appris beaucoup de choses. Au début de mon S3 Recherche, M. Rouchon m'a proposé ce sujet [l'intrication de deux Qubits] car il pensait qu'on pouvait obtenir des résultats intéressants avec un contrôle en boucle fermée (J.F. Ralph ayant utilisé une méthode bien différente).

M. Rouchon avait alors déjà une idée de la façon de procéder dans les grandes lignes, et mon premier travail de recherche fut de trouver la trajectoire de référence $|\psi_{ref}\rangle$.

Pendant ce semestre recherche, j'ai dû me familiariser avec de nombreux concepts peu évidents (algèbre tensorielle, filtre quantique, concurrence...), ma part personnelle est alors l'adaptation de ces concepts au cas du système de deux Qubits.

Si je ne devais garder que les idées que je juge les plus personnelles, je dirais que ce sont les deux suivantes :

- Choisir un contrôle constant puis un contrôle nul dans la trajectoire de référence en imposant $\frac{\omega}{k} \in 2\mathbb{Z}$ en 3.2.3 pour que la concurrence reste à 100%.
- L'idée de "dégrader" la trajectoire de référence en 4.5.2 afin de pouvoir contrôler tout de même l'intrication du système réel.

Bibliographie

- [1] I. Dotsenko, M. Mirrahimi, M. Brune, S. Haroche, J.-M. Raimond, and P. Rouchon. Quantum feedback by discrete quantum non-demolition measurements : towards on-demand generation of photon-number states. *Physical Review A*, 80 : 013805-013813, 2009.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë *Mécanique quantique vol 1 et 2*. Hermann, 1966.
- [3] D. D'Alessandro. *Introduction to Quantum Control and Dynamics*. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [4] Wootters, William K. *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*. Physical review letters, Williams College, September 1997.
- [5] P. Rouchon and J. F. Ralph *Efficient Quantum Filtering for Quantum Feedback Control*. January 2015.
- [6] M. Mirrahimi. *Lyapunov control of a quantum particle in a decaying potential*. *arXiv :0805.0910v1* 2008.
- [7] C. Altafini and F. Ticozzi. Modeling and control of quantum systems : An introduction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(8) :1898–1917, 2012.
- [8] H. Amini, C. Pellegrini, and P. Rouchon. Stability of continuous-time quantum filters with measurement imperfections. *arXiv :1312.0418v1*, 2013.
- [9] H. Amini, R.A. Somaraju, I. Dotsenko, C. Sayrin, M. Mirrahimi, and P. Rouchon. Feedback stabilization of discrete-time quantum systems subject to non-demolition measurements with imperfections and delays. *Automatica*, 49(9) :2683–2692, September 2013.
- [10] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open Quantum Systems III : Recent Developments*. Springer, Lecture notes in Mathematics 1880, 2006.
- [11] L. Baudoin and J. Salomon. Constructive solution of a bilinear optimal control problem for a Schrödinger equation. *Systems and Control Letters*, 57 :453—464, 2008.
- [12] V.P. Belavkin. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering. *Journal of Multivariate Analysis*, 42(2) :171–201, 1992.
- [13] L. Bouten and R. van Handel. *Quantum Stochastics and Information : Statistics, Filtering and Control*, chapter On the separation principle of quantum control. World Scientific, 2008.

- [14] H. . Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1993.
- [15] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1 : Master Equations and Fokker-Planck Equations* . Springer, 1999.
- [16] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 2 : Non-Classical Fields*. Springer, 2007.
- [17] T. Chambrion, P. Mason, M. Sigalotti, and M. Boscain. Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(1) :329–349, 2009.
- [18] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, Florian Marquardt, and R. J. Schoelkopf. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Rev. Mod. Phys.*, 82(2) :1155–1208, April 2010.
- [19] J. Dalibard, Y. Castion, and K. Mølmer. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Phys. Rev. Lett.*, 68(5) :580–583, 1992.
- [20] E.B. Davies. *Quantum Theory of Open Systems*. Academic Press, 1976.
- [21] S. Ervedoza and J.-P. Puel. Approximate controllability for a system of Schrödinger equations modeling a single trapped ion. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 26(6) :2111 – 2136, 2009.
- [22] C.W. Gardiner and P. Zoller. *Quantum noise*. Springer, third edition, 2010.
- [23] A. Garon, S. J. Glaser, and D. Sugny. Time-optimal control of SU(2) quantum operations. *Phys. Rev. A*, 88(4) :043422–, October 2013.
- [24] J. Gough and M.R. James. The series product and its application to quantum feedforward and feedback networks. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(11) :2530–2544, 2009.
- [25] S. Haroche and J.M. Raimond. *Exploring the Quantum : Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, 2006.
- [26] M.R. James. Quantum feedback control. In *Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese*, pages 26–34, 2011.
- [27] A. Kossakowski. On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems. *Reports on Mathematical Physics*, 3, 1972.
- [28] H.J. Kushner. *Introduction to Stochastic Control*. Holt, Rinehart and Wilson, INC., 1971.
- [29] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48, 1976.
- [30] S. Lloyd. Coherent quantum feedback. *Phys. Rev. A*, 62(2) :022108–, July 2000.
- [31] J.C Maxwell. On governors. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 16, 1868.
- [32] G.N. Milstein. *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. Spinger, 1995.

- [33] M. Mirrahimi and R. Van Handel. Stabilizing feedback controls for quantum systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(2) :445–467, 2007.
- [34] P. Rouchon. Fidelity is a sub-martingale for discrete-time quantum filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(11) :2743–2747, 2011.
- [35] C. Sayrin. *Préparation et stabilisation d'un champ non classique en cavité par rétroaction quantique*. PhD thesis, Université Paris VI, 2011.
- [36] C. Sayrin, I. Dotsenko, X. Zhou, B. Peaudecerf, Th. Rybarczyk, S. Gleyzes, P. Rouchon, M. Mirrahimi, H. Amini, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*, 477 :73–77, 2011.
- [37] A. Somaraju, I. Dotsenko, C. Sayrin, and P. Rouchon. Design and stability of discrete-time quantum filters with measurement imperfections. In *American Control Conference*, pages 5084–5089, 2012.
- [38] A. Somaraju, M. Mirrahimi, and P Rouchon. Approximate stabilization of an infinite dimensional quantum stochastic system. *Rev. Math. Phys.*, 25(01) :1350001–, January 2013.
- [39] R. van Handel. The stability of quantum Markov filters. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 12 :153–172, 2009.
- [40] R. Vijay, C. Macklin, D. H. Slichter, S. J. Weber, K. W. Murch, R. Naik, A. N. Korotkov, and I. Siddiqi. Stabilizing Rabi oscillations in a superconducting qubit using quantum feedback. *Nature*, 490(7418) :77–80, 2012.